

Zadanie 1. Znajdź wymiar i bazę podprzestrzeni:

- a) $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0\}$,
b) $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_3 + x_4 + x_1 = 0, x_4 + x_1 + x_2 = 0\}$.

Zadanie 2. Udowodnij, że $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - 2z - t = y - t = x - y + t\}$ jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^4$. Wyznacz bazę i podaj wymiar V .

Zadanie 3. Sprawdź, czy zbiór:

$$U = \{w \in \mathbb{R}[x]_3 : w(0) - w'(1) = 0 \wedge w''(-x) + xw'''(x) = 0\}$$

jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$. Jeśli tak, wyznacz bazę i wymiar tej podprzestrzeni.

Zadanie 4.

- a) Niech $V = \{w \in \mathbb{R}[x] : (x^2 + 1)w(1) + xw''(1) = 0\}$. Udowodnij, że V jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni wielomianów dowolnego stopnia.
b) Udowodnij, że wielomiany $w_1(x) = x^2 + 2, w_2(x) = x^2 + x, w_3(x) = 2x^2 - x + 3$ stanowią bazę przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}[x]_2$. Wyznacz współrzędne wektora $w(x) = x^2 - 4$ w bazie (w_1, w_2, w_3) .

Zadanie 5. Wyznacz bazę i wymiar przestrzeni:

$$V = \text{lin} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Następnie podaj współrzędne wektora $A = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 6. Wykaż, że zbiór $U = \{w \in \mathbb{R}[x]_3 : w(1) = w(2)\}$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$. Znajdź bazę i wymiar przestrzeni U , a następnie znajdź współrzędne wektora $w(x) = x^3 - 2x^2 - x + 4$ w wyznaczonej bazie.